

# Variationsrechnung

Martin Schneider  
0220179

eingereicht bei Prof. Kinzl  
im Rahmen des *Mathematisches Seminars*

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung und Motivation</b>	<b>3</b>
1.1	Bezeichnungen und Definitionen . . . . .	3
1.2	Grundaufgabe der Variationsrechnung . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Anwendungen der Variationsrechnung</b>	<b>3</b>
2.1	Brachystochrone . . . . .	3
2.2	Kettenlinie . . . . .	5
2.3	Isoperimetrische Probleme . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Die Euler-Gleichung</b>	<b>6</b>
3.1	Sonderfälle der Euler-Gleichung . . . . .	10
3.2	Ein Beispiel: Die Brachystochrone . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Randbedingungen, Transversalitätsbedingung</b>	<b>13</b>
4.1	Die natürlichen Randbedingungen . . . . .	13
4.2	Die Transversalitätsbedingung . . . . .	14
4.3	Variationsprobleme mit Nebenbedingungen . . . . .	14
4.4	Beispiele . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Verallgemeinerungen</b>	<b>16</b>
5.1	Variationsprobleme mit höheren Ableitungen . . . . .	16
5.2	Variationsprobleme mit mehreren Variablen . . . . .	17
5.2.1	Variationsprobleme in der Ebene . . . . .	17
5.2.2	Variationsprobleme im Raum . . . . .	17

<b>6</b>	<b>Direkte Methoden der Variationsrechnung</b>	<b>18</b>
6.1	Methode von Ritz . . . . .	18
6.1.1	Ein Beispiel . . . . .	19

# 1 Einführung und Motivation

## 1.1 Bezeichnungen und Definitionen

$V$  ... ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum

$\mathcal{C}[a, b]$  ... Menge aller stetigen Funktionen  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$\mathcal{C}^k[a, b]$  ... Menge aller  $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen  $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

**Definition 1.1 (Funktional)** Sei  $D \subseteq V$ . Eine Abbildung  $I : D \rightarrow \mathbb{R}$ , die jedem Vektor  $v \in D$  eine reelle Zahl  $I(v)$  zuordnet heißt *Funktional*.

Ein Beispiel: Sei  $V$  der Vektorraum aller  $\mathcal{C}^1$ -Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist die *Bogenlänge* einer Kurve von  $a$  nach  $b$  gegeben durch:

$$I : V \rightarrow \mathbb{R}, I(f) := \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (1)$$

## 1.2 Grundaufgabe der Variationsrechnung

Die Grundaufgabe der Variationsrechnung besteht darin aus einer Menge  $D$  diejenigen zu finden, für den ein gegebenes Funktional  $I : D \rightarrow \mathbb{R}$  (oft ein physikalisch motiviertes Integral) minimalen oder maximalen Wert annimmt. Wir schreiben hierfür:

$$I(y) = \text{Extr!}, \quad I(y) = \text{Min!} \quad \text{bzw.} \quad I(y) = \text{Max!}$$

Eine Möglichkeit eine Lösung eines speziellen Variationsproblems zu finden bietet ein nach Euler und Lagrange benanntes Verfahren, welches eine Differentialgleichung für die gesuchte Funktion liefert. (*Euler-Lagrange-Differentialgleichung*, Satz 3.2). Andere Methoden, wie das *Verfahren von Ritz* verwenden einen approximativen Ansatz zur Bestimmung der Extremalen (Kapitel 6).

# 2 Anwendungen der Variationsrechnung

## 2.1 Brachystochrone

Den Anstoß zur Entwicklung der Variationsrechnung gab folgendes 1696 von Johann Bernoulli (in einer Ausgabe seiner *Acta Eruditorum*) formulierte Problem, zu dem er selbst, sein Bruder Jakob sowie Newton, Leibniz und de

L'Hôpital innerhalb eines halben Jahres Lösungen angeben.<sup>1</sup> Zwei in einer vertikalen Ebene gegebene Punkte A und B sind durch eine Funktion (*Brachystochrone*, griechisch: *brachyistos*=krzest, *chronos*=Zeit)  $y = f(x)$  so zu verbinden, dass ein Massenpunkt, der unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungslos längs derselben herabgleitet, in kürzester Zeit von A nach B gelangt. Die Anfangsgeschwindigkeit im Punkt A sei 0.

Seien  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ .

Es gilt der Satz von der Erhaltung der Energie:  $E = K + U$  ( $K$ =kinetische Energie,  $U$ =potentielle Energie), woraus sich die Geschwindigkeit  $v$  ergibt:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgy \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gy}.$$

Wir möchten nun ein Funktional für die Zeit  $t$ , die der Körper benötigt um vom Punkt A zum Punkt B zu gelangen, formulieren und dieses minimieren. Dazu teilen wir den Weg von A nach B in kleine Stücke ein, in denen die Geschwindigkeit als konstant angenommen wird:

$$\begin{aligned} \Delta s_k &= v(\tau_k) \cdot \Delta t_k \\ \Delta t_k &= \frac{\Delta s_k}{v(\tau_k)} = \frac{\sqrt{1 + y'(\tau_k)^2} \Delta x_k}{\sqrt{2gy(\tau_k)}} = \sqrt{\frac{1 + y'(\tau_k)^2}{2gy(\tau_k)}} \Delta x_k \\ \Rightarrow t &\approx \sum_{k=1}^p \Delta t_k = \sum_{k=1}^p \sqrt{\frac{1 + y'(\tau_k)^2}{2gy(\tau_k)}} \Delta x_k \approx \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{2gy(x)}} \end{aligned}$$

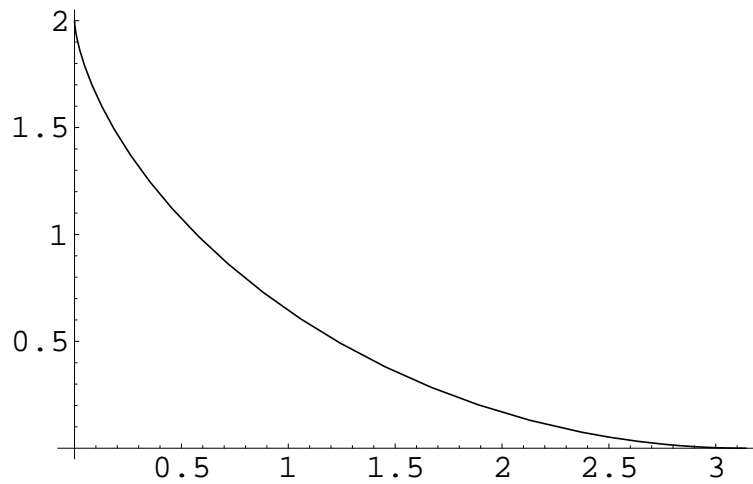
Wir müssen daher

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx = \text{Min!}$$

mit  $y(0) = 0$  und  $y(a) = b$  fordern und werden später (3.2) zeigen, dass die Brachystochrone eine Zyklode ist.

---

<sup>1</sup>Nähere Details zur Geschichte des Brachystochronen-Problems sowie dem Werk der Brüder Bernoulli finden sich zum Beispiel in [4].

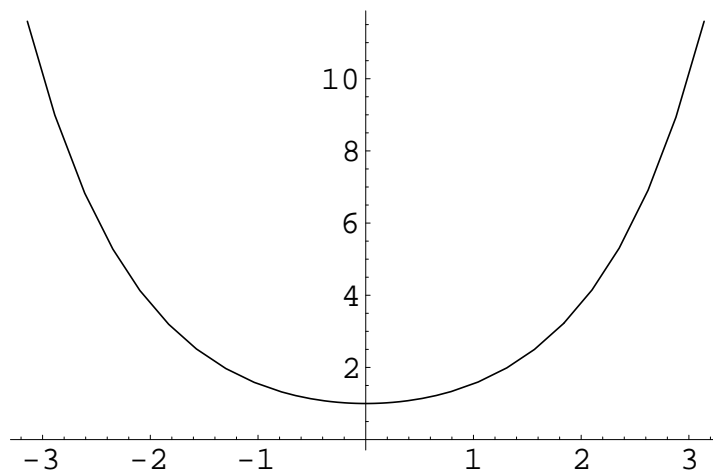


## 2.2 Kettenlinie

Eine Kette ist in ihren Endpunkten  $A$  und  $B$  befestigt und hängt nur der Schwerkraft ausgesetzt herunter (zum Beispiel: Tragseile, elektrische Überlandleitungen). Gesucht ist jene Kurve  $y = f(x)$ , welche die Gleichgewichtslage der Kette angibt. Dieses Problem wurde erstmals 1690 von Jakob Bernoulli aufgeworfen und im Jahr darauf von dessen Bruder Johann sowie Newton und Huygens jeweils unabhängig von einander gelöst. In moderner Schreibweise lautet die gesuchte Funktion:

$$y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a} = \frac{\cosh ax}{a},$$

wobei  $a$  eine Konstante ist, die von den physikalischen Parametern der Kette abhängt [4]. Im Folgenden ein Beispiel mit  $a=1$ .



## 2.3 Isoperimetrische Probleme

Isoperimetrische Probleme sind Beispiele für Variationsprobleme mit Nebenbedingung. Der Name hat seinen Ursprung in Problemen, bei denen unter allen isoperimetrischen Figuren (Figuren gleichen Umfangs) diejenige mit größtem Flächeninhalt zu bestimmen ist. Gesucht sind zum Beispiel:

- eine geschlossene Kurve gegebener Länge  $L$ , die eine möglichst große Fläche einschließt (*Kreis*),
- das Dreieck, das bei gegebenem Umfang den größten Inhalt hat (das *gleichseitige Dreieck*).
- eine Kurve  $y = f(x)$  mit gegebener Länge  $L$  und Anfangspunkt  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ , die in einem frei bleibenden Punkt  $\xi$  der  $x$ -Achse endet und mit der  $x$ -Achse eine möglichst große Fläche einschließt. Dieses Beispiel führt auf folgendes Variationsproblem:

$$F = \int_0^\xi y dx = \text{Max!} \quad (\text{maximaler Flächeninhalt})$$

mit der Nebenbedingung

$$L = \int_0^\xi \sqrt{1 + y'^2} \quad (\text{feste Länge } L)$$

sowie den Randbedingungen

$$f(0) = f(\xi) = 0 \quad (\text{Start- und Endpunkt auf der } x\text{-Achse}).$$

- eine Kurve, die zwei Punkte  $A, B$  verbindet und bei Drehung um die  $x$ -Achse eine minimale Rotationsfläche erzeugt. Das führt auf die Variationsaufgabe

$$F = 2\pi \int_0^a y \sqrt{1 + y'^2} dx = \text{Min!}$$

## 3 Die Euler-Gleichung

Sei  $V$  ein Vektorraum von Funktionen, sei  $D \subseteq V$ , sei  $I : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

Wir suchen eine notwendige Bedingung für die Lösung des Variationsproblems

$$I(y) := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx = \text{Extr!} \quad y \in D \quad (2)$$

mit den Randbedingungen  $y(x_1) = y_1$  und  $y(x_2) = y_2$ . Sei  $y^*$  eine Lösung. Wir betrachten Funktionen in der Umgebung von  $y^*$  der Art

$$y_\epsilon := y^* + \epsilon v \quad v = v(x) \in V, |\epsilon| > 0.$$

Sei  $h(\epsilon) = I(y^* + \epsilon v)$

$$\Rightarrow h(\epsilon) = \int_a^b f(x, y^* + \epsilon v, y^{*'} + \epsilon v') dx = \text{Extr!}$$

Da  $y^*$  das Variationsproblems löst, besitzt  $h(\epsilon)$  an der Stelle  $\epsilon = 0$  ein lokales Extremum.

$$\Rightarrow h'(0) = \frac{d}{d\epsilon} I(y^* + \epsilon v)|_{\epsilon=0} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [I(y^* + \epsilon v) - I(y^*)] = 0.$$

Dieses Ergebnis führt zu folgender Definition:

**Definition 3.1 (Gâteaux-Variation)** Seien  $y, v \in D$  derart, dass  $y + \epsilon v \in D$  für  $|\epsilon| < \epsilon_0$ .

Dann heißt

$$\delta I(y; v) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} [I(y + \epsilon v) - I(y)] = \frac{d}{d\epsilon} I(y + \epsilon v)|_{\epsilon=0}. \quad (3)$$

*erste Variation* oder *Gâteaux-Variation* von  $I$  von  $y$  in Richtung  $v$  (vorausgesetzt der Grenzwert existiert).

Analog definiert man höhere Variationen:

$$\delta^n I(y; v) := \frac{d^n}{d\epsilon^n} I(y + \epsilon v)|_{\epsilon=0} \quad (4)$$

**Bemerkung:** Für eine  $\mathcal{C}^1$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y, v \in \mathbb{R}^n$  ist die Gâteaux-Variation gerade die *Richtungsableitung*:

$$\delta f(y; v) = \partial_v f(y) = \text{grad } f(y) \cdot v \quad (5)$$

Wenn die Funktion  $h(\epsilon) = I(y^* + \epsilon v)$  für  $\epsilon \geq 0$  ein lokales Minimum (Maximum) besitzt, so gilt bekanntlich

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) \geq 0 \quad (h''(0) \leq 0)$$

Wir formulieren daher folgenden Satz:

**Satz 3.1** Sei  $y^*$  Lösung von  $I(y) = Extr!$ . Es existiere die *Gâteaux-Variation* von  $I$  in  $y^*$  in Richtung  $v$ . Dann gilt:

$$\delta I(y^*; v) = 0, \quad (6)$$

Für die Lösung  $y^*$  eines Minimalproblems  $I(y) = Min!$  gilt:

$$\delta I(y^*; v) = 0, \quad \delta^2(y^*; v) \geq 0$$

Auch diese Bedingung ist im Allgemeinen *nicht* hinreichend. Analog muss eine Lösung  $y^*$  von  $I(y) = Max!$  die Bedingung

$$\delta I(y^*; v) = 0, \quad \delta^2(y^*; v) \geq 0$$

erfüllen.

**Satz 3.2 (Euler-Lagrange Differentialgleichung)** Jede Lösung eines Variationsproblems der Form (2) erfüllt notwendig die *Euler-Lagrange-Differentialgleichung*:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y, y') = 0 \quad (7)$$

oder ausgeschrieben

$$F_y - F_{y'x} - F_{y'y'}y' - F_{y'y''}y'' = 0. \quad (8)$$

Die Lösungen der *Euler-Lagrange-Gleichung*, die oft auch nur als *Euler-Gleichung* bezeichnet wird, heißen *Extremale* des Variationsproblems (2).

Um diesen Satz zu beweisen, zeigen wir zunächst folgenden

**Satz 3.3 (Hilfssatz)** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Für alle stetigen Funktionen  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ . Dann ist  $f = 0$ .

**Beweis:** Angenommen  $f$  ist an einer Stelle  $x_0$  von 0 verschieden, etwa  $f(x_0) > 0$ . Wegen der Stetigkeit gilt:  $\exists$  Intervall  $[\alpha, \beta]$  mit  $x_0 \in [\alpha, \beta]$  und  $f(x) > 0 \forall x \in [\alpha, \beta]$ . Sei  $g(x) = 0$  für  $|x - x_0| \geq \delta$  und  $g(x) > 0$  für  $|x - x_0| < \delta$ .

$$\int_a^b f(x)g(x) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x) > 0 \quad \blacksquare$$

**Beweis (Euler-Gleichung):** Mit Satz (3.1) muss gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta(y^*; g) \\
&= \frac{d}{d\epsilon} \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_\epsilon(x), y'_\epsilon(x))|_{\epsilon=0} dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial \epsilon} F(x, y_\epsilon(x), y'_\epsilon(x))|_{\epsilon=0} dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (F_y(x, y^*, y^{*'})g(x) + F'_y(x, y^*, y^{*'})g'(x)) dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (F_y(x, y^*, y^{*'})g(x) dx + \int_{x_0}^{x_1} F'_y(x, y^*, y^{*'})g'(x) dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (F_y(x, y^*, y^{*'})g(x) dx + g(x)F'_{y'}|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} g(x) \frac{d}{dx} F_{y'} dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (F_y(x, y^*, y^{*'})g(x) dx - \int_{x_0}^{x_1} g(x) \frac{d}{dx} F_{y'} dx \\
&= \int_{x_0}^{x_1} [(F_y(x, y^*, y^{*'}) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y^*, y^{*'}))] \cdot g(x) dx
\end{aligned}$$

Aus Satz (3.3) folgt dann, dass  $F_y(x, y^*, y^{*'}) - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y^*, y^{*'}) = 0$  ■.

**Beispiel 3.1** Als erstes Beispiel für die Anwendung der *Euler-Gleichung* wollen wir für zwei Punkte der Ebene  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  und  $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$  die kürzeste Verbindungskurve bestimmen. Dazu müssen wir fordern, dass die Bogenlänge minimal wird:

$$I(y) := \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx = \text{Min!} \quad y \in D.$$

Somit erhalten wir:

$$F = \sqrt{1 + y'(x)^2} \quad F_y = 0 \quad F'_y = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'(x)^2}}.$$

Die *Euler-Gleichung* lautet also:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'(x)}{\sqrt{1 + y'(x)^2}} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{y'(x)}{\sqrt{1+y'(x)^2}} &= \text{const} = c \\ \Rightarrow y' &= \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}\end{aligned}$$

Sei  $a := \sqrt{\frac{c^2}{1-c^2}}$  und  $b = \text{const}$ , dann folgt:

$$y(x) = ax + b.$$

Die gesuchte Kurve ist wie erwartet eine Gerade.

### 3.1 Sonderfälle der Euler-Gleichung

Im Folgenden werden wir einfachere Bedingungen für ein Extremum für bestimmte Sonderfälle des Variationsproblems (2) angeben.

**$F$  ist linear in  $y'$ :** Das bedeutet  $F(x, y, y')$  ist von der Form

$$P(x, y) + Q(x, y) \cdot y'. \quad (9)$$

$P$  und  $Q$  hängen nicht von  $y'$  ab und die Euler-Gleichung vereinfacht sich zu  $P_y - Q_x = 0$ . Die Lösungen eines solchen Variationsproblems müssen daher die notwendige Bedingung

$$P_y(x, y(x)) = Q_x(x, y(x)) \quad (10)$$

erfüllen. Dabei können folgende drei Fälle auftreten:

1.  $P_y = Q_x$  gilt längs einzelner Kurven. In diesem Fall sind die entsprechenden Kurven die Kandidaten für ein Extremum (die Lösungen der Euler-Gleichung).
2.  $P_y = Q_x$  gilt überall. Daraus folgt, dass das Integral

$$\int_C P(x, y) + Q(x, y) dy$$

wegunabhängig ist und folglich jede Funktion ein Extremum liefert.

3.  $P_y = Q_x$  gilt nirgends oder nur für einzelne Punkte. In diesem Fall hat das Variationsproblem keine Lösung.

**$F$  hängt nicht explizit von  $x$  ab:** Wir betrachten also ein Variationsproblem der Form  $F(x, y, y') = F(y, y')$ . Es gilt daher

$$F_x = F_{y'x} = 0. \quad (11)$$

Weiters findet man unter Berücksichtigung von (11)

$$\frac{d}{dx}(y'F_y(y, y') - F(x, y, y')) = y'(F_{y'y}y' + F_{y'y'}y'' - F_y) \quad (12)$$

Da  $F$  nicht von  $x$  abhängt vereinfacht sich die Euler-Gleichung zu

$$F_y - F_{yy'}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Damit folgt aus (12) als notwendige Bedingung für ein Extremum

$$\frac{d}{dx}(y'F_y(y, y') - F(x, y, y')) = 0$$

beziehungsweise durch einmalige Integration

$$y'F_y(y, y') - F(x, y, y') = \text{const.} \quad (13)$$

**$F$  hängt nicht explizit von  $y$  ab:**  $F(x, y, y') = F(x, y')$ . Die Euler-Gleichung lautet hier  $\frac{d}{dx}F'_y = 0$  woraus

$$F'_y = \text{const.} \quad (14)$$

folgt.

**$F$  hängt nicht explizit von  $y'$  ab:**  $F(x, y, y') = F(x, y)$ . Dann lautet die Euler-Gleichung

$$F_y = 0, \quad (15)$$

was bereits eine implizite Darstellung der Lösung ist.

### 3.2 Ein Beispiel: Die Brachystochrone

In (2.1) haben wir gezeigt, dass die Brachystochrone die Lösung des Variationsproblems

$$T = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}} dx = \text{Min!}$$

ist. Da  $T$  nicht explizit von  $x$  abhängt, verwenden wir die modifizierte Euler-Gleichung (13) für  $L = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$ :

$$\begin{aligned} y' L_{y'} - L &= y' \frac{y'}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} - \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} \\ &= \frac{y'^2 - (1+y'^2)}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} \\ &= \text{const} =: C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2gy(1+y'^2) &= \frac{1}{C^2} \\ y(1+y'^2) &= \frac{1}{2gC^2} \\ &= 2 \frac{1}{4gC^2} \\ &=: 2\varrho \end{aligned}$$

Nun substituieren wir

$$y' = \cot \frac{t}{2} \tag{16}$$

$$\Rightarrow 1 + y'^2 = 1 + \cot^2 \frac{t}{2} = \frac{1}{\sin^2 \frac{t}{2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{2\varrho}{1+y'^2} = 2\varrho \sin^2 \frac{t}{2} = \varrho(1 - \cos t)$$

Differentiation führt auf:

$$y' = \varrho \sin t \frac{dt}{dx}$$

Durch Vergleich mit (16) erhalten wir

$$\varrho \sin t \frac{dt}{dx} = \cot \frac{t}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = \varrho \frac{\sin t}{\cot \frac{t}{2}} = \varrho(1 - \cos t)$$

und durch Integration schließlich:

$$x = \varrho(t - \sin t) + C_1.$$

Die Lösung ist also eine Zykloide:

$$x = \varrho(t - \sin t) + C_1$$

$$y = \varrho(1 - \cos t).$$

Die Konstanten  $C_1$  und  $\varrho$ , müssen an Hand der Randbedingungen bestimmt werden. Für  $t = 0$  folgt  $y = \varrho(1 - \cos 0) = 0$ . Damit die Zykloide durch den Nullpunkt geht, muss auch  $x = \varrho(0 - \sin 0) + C_1 = 0$  sein, woraus  $C_1 = 0$  folgt.

Für den zweiten Parameter ist folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\varrho(t - \sin t) = a$$

$$\varrho(1 - \cos t) = b$$

$$\Rightarrow a(1 - \cos t) = b(t - \sin t)$$

Die Lösung kann nicht in geschlossener Form angegeben werden und ist in der Praxis näherungsweise zu bestimmen (etwa mit dem Newton-Verfahren).

## 4 Randbedingungen, Transversalitätsbedingung

### 4.1 Die natürlichen Randbedingungen

Wir betrachten weiterhin Variationsprobleme der Form (2):

$$I(y) := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx = \text{Extr!}, \quad (17)$$

mit  $y(x_0) = y_0$  nun aber mit  $y(x_1)$  =beliebig, das heißt  $y$  ist am linken Rand festgelegt und am rechten Rand frei. Eine Lösung dieses Variationsproblems muss neben der Euler-Gleichung die natürliche Randbedingung am rechten Rand erfüllen:

$$F'_y(x_1, y^*(x_1), y^{*'}(x_1)) = 0 \quad (18)$$

Völlig analog gilt für freien linken Rand ( $y(x_0)$  =beliebig und  $y(x_1) = y_1$ ) die natürliche Randbedingung am linken Rand

$$F'_y(x_0, y^*(x_0), y^{*'}(x_0)) = 0 \quad (19)$$

Sind beide Grenzen frei, müssen (18) und (19) erfüllt sein.

## 4.2 Die Transversalitätsbedingung

Als nächsten Schritt lassen wir den Randpunkt auch in  $x$ -Richtung variieren und schreiben vor, dass er auf einer vorgegebenen Kurve  $y = f(x)$  liegen soll. Sei der linke Rand fest  $y(x_0) = y_0$  und  $y(x_1) = y(b) = f(b)$  mit unbekanntem  $x_1 = b$ . Wir erhalten folgendes Variationsproblem:

$$I(y) := \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx = \text{Extr!}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(b) = f(b). \quad (20)$$

Eine Lösung dieses Variationsproblems muss neben der Euler-Gleichung auch die Transversalitätsbedingung erfüllen:

$$F_{y'} + \frac{F}{f' - y'^*} = 0 \quad (21)$$

## 4.3 Variationsprobleme mit Nebenbedingungen

Gesucht sind alle Lösungen eines Variationsproblems, die neben  $I(v) = \text{Extr!}$  auch eine Nebenbedingung  $K(v) = c$  erfüllen. Sei also  $K : V \supseteq S \rightarrow \mathbb{R}$  ein Funktional. Dann wird  $N_c := \{v \in V : K(v) = c\} \in \mathbb{R}$  als Niveaumenge von  $K$  bezeichnet. Sei  $I : V \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$  ein weiteres Funktional. Im Gegensatz zu den vorherigen Betrachtungen beschäftigen wir uns nun mit dem Variationsproblem

$$I(v) = \text{Extr!} \quad v \in D \cap N_c. \quad (22)$$

Mit Hilfe der Lagrange-Multiplikatorregel lässt sich folgende notwendige Bedingung für eine Extremale  $y^*$  herleiten:

$$\delta I(y^*; v) + \lambda \delta K(y^*; v) = 0. \quad (23)$$

## 4.4 Beispiele

Als Beispiel für ein Variationsproblem mit Nebenbedingung wollen wir folgendes isoperimetrische Problem lösen: Gesucht ist jene Kurve  $y$  der Länge  $L$  durch die Punkte  $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  und  $B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ , welche mit der  $x$ -Achse eine möglichst große Fläche einschließt.

Wir müssen daher fordern:

$$I = \int_0^b y(x) dx = \text{Max!}$$

mit der Nebenbedingung

$$L = \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

und den Randbedingungen  $y(0) = y(b) = 0$ . Wir lösen das Problem mit Hilfe der *Lagrange-Multiplikation*:

$$L - \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx = 0$$

Damit folgt das Variationsproblem:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^b y dx + \lambda \left( L - \int_0^b \sqrt{1 + y'^2} dx \right) \\ &= \int_0^b (y - \lambda \sqrt{1 + y'^2}) dx + \lambda L \\ &= \int_0^b \left( y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} + \frac{\lambda L}{b} \right) dx \\ &= \text{Max!} \end{aligned}$$

Wir bestimmen für  $F(x, y, y') = y - \lambda \sqrt{1 + y'^2} + \frac{\lambda L}{b}$  die Euler-Gleichung.

$$\begin{aligned} F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} &= 0 \\ 1 - \frac{d}{dx} \frac{-\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= 0 \\ \frac{d}{dx} \frac{-\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= 1 \\ \frac{-\lambda y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= x + k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y'^2 &= \left(\frac{x+k}{\lambda}\right)^2(1+y'^2) \\
1 &= \left(\frac{x+k}{\lambda y'}\right)^2 + \left(\frac{x+k}{\lambda}\right)^2 \\
y' &= \frac{\frac{x+k}{\lambda}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+k}{\lambda}\right)^2}} \quad (\text{nachrechnen!}) \\
y &= \int \frac{\frac{x+k}{\lambda}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x+k}{\lambda}\right)^2}} dx + c
\end{aligned}$$

Mit  $\int \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dx = x\sqrt{1-x^2}$  folgt dann weiter (man substituiere  $y = \frac{x+k}{\lambda}$ ):

$$\begin{aligned}
y &= \lambda \sqrt{1 - \left(\frac{x+k}{\lambda}\right)^2} + c \\
\frac{y-c}{\lambda} &= \sqrt{1 - \left(\frac{x+k}{\lambda}\right)^2}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Lösung:

$$\left(\frac{x+k}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{y-c}{\lambda}\right)^2 = 1 \quad (= \text{Kreis})$$

## 5 Verallgemeinerungen

In den bisherigen Kapiteln haben wir lediglich Variationsprobleme der Form (2) behandelt. In diesem Abschnitt werden einige Erweiterungen angegeben:

### 5.1 Variationsprobleme mit höheren Ableitungen

Gegeben sei folgendes Variationsproblem

$$I(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) dx = \text{Extr!}$$

In diesem Fall lautet die *Euler-Gleichung*:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0.$$

Wir werden die Anwendung dieser Gleichung im Folgenden an Hand eines physikalischen Beispiel demonstrieren.

**Beispiel [Balkenbiegung]<sup>2</sup>**

Wir wollen die Auslenkung eines bei 0 und 1 eingespannten Balkens mit Streckenlast  $q(x)$  ermitteln. Sei  $EI(x)$  die Biegefestigkeit. Die Krümmung der Biegelinie wird durch  $y''$  angenähert. Dann beträgt die Formänderungsarbeit

$$W(y) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{2}EI(x)y''(x)^2 + y(x)q(x) \right] dx.$$

Gleichgewicht tritt bei  $W(y) = \text{Min!}$  ein. Dieses Variationsproblem führt auf die Differentialgleichung der Balkenbiegung

$$(EI(x)y'')'' + q(x) = 0.$$

## 5.2 Variationsprobleme mit mehreren Variablen

### 5.2.1 Variationsprobleme in der Ebene

$$I(w) = \iint_D F(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y)) dx dy = \text{Extr!}$$

In diesem Fall lautet die *Euler-Gleichung*

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w_y}$$

Ein Beispiel für ein solches Variationsproblem ist die schwingende Saite<sup>3</sup>.

### 5.2.2 Variationsprobleme im Raum

$$I(w) = \iiint_D F(x, y, w(x, y), w_x(x, y), w_y(x, y), w_z(x, y)) dx dy dz = \text{Extr!}$$

Analog zur Ebene lautet die *Euler-Gleichung*

$$F_w - \frac{\partial}{\partial x} F_{w_x} - \frac{\partial}{\partial y} F_{w_y} - \frac{\partial}{\partial z} F_{w_z}$$

Ein Anwendungsbeispiel stellt hier die schwingende Membran dar<sup>4</sup>.

---

<sup>2</sup>Vgl. [3], S. 424

<sup>3</sup>Vgl. [3], S. 433

<sup>4</sup>Vgl. [3], S. 435

## 6 Direkte Methoden der Variationsrechnung

Da sich die Differentialgleichungen eines Variationsproblems nur in Ausnahmefällen einfach integrieren lassen, werden für praktische Anwendungen der Variationsrechnung meist andere Lösungsmethoden verwendet. Die Idee hinter den direkten Methoden besteht darin ein Funktional  $I(f(x))$  als eine Funktion in unendlich vielen Unbekannten aufzufassen. Die Vergleichsfunktionen lassen sich unter gewissen Voraussetzungen als unendliche Reihen anschreiben:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad \text{mit gegebenen Funktionen } \varphi_n \quad (24)$$

Die Funktion  $f(x)$  ist durch die Koeffizienten  $a_1, a_2 \dots$  vollständig festgelegt, daher hängt auch der Wert des Funktionals  $I(f)$  nur von diesen Koeffizienten ab und kann daher als Funktion in unendlich vielen Variablen betrachtet werden. Indem man zunächst nur endlich viele Variablen betrachtet, kann man in vielen Fällen durch Grenzübergang zu einer Lösung des Variationsproblems kommen.

Eine erste direkte Methode, die lange Zeit in Vergessenheit geriet, stammt bereits von Leonhard Euler und ist heute als Eulersches Differenzenverfahren bekannt. In jüngerer Zeit wurden direkte Verfahren der Variationsrechnung vor allem von russischen Mathematikern entwickelt und verbessert, z.B. Boris Galerkin (1871-1945), Leonid W. Kantorowitsch (1912-1986). Wir werden im Folgenden lediglich ein nach dem schweizer Mathematiker Walter Ritz (1878-1909) benanntes Verfahren betrachten.

### 6.1 Methode von Ritz

Beim Verfahren von Ritz beschränkt man sich auf Vergleichsfunktionen der Form

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x) \quad (25)$$

mit konstanten Koeffizienten  $\alpha_i$  der ersten  $n$  Funktionen einer Funktionenfolge  $W_i(x)$ . Das Funktional  $I(f(x))$  geht dann längs der  $y_n$  in eine Funktion  $\varphi(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  über. Die  $\alpha_n$  müssen nun so bestimmt werden, dass  $\varphi$  zum Extremum wird:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Falls die Folge  $y_n$  konvergiert erhalten wir mittels Grenzübergang  $n \rightarrow \infty$  die Grenzfunktion

$$y_n = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i W_i(x),$$

die unter gewissen Voraussetzungen die exakte Lösung des Variationsproblems darstellt. Führt man den Grenzübergang nicht durch, erhält man eine Näherungslösung.

Die Funktionen  $y_n$  müssen zulässige Vergleichsfunktionen des Variationsproblems sein, das heißt sie müssen neben allgemeinen Voraussetzungen wie Stetigkeit und Glattheit auch die Randbedingungen erfüllen. Dies erfüllt man am einfachsten, indem man die Funktionen  $W_i$  so wählt, dass jede für sich die Randbedingungen erfüllt. Seien die Randbedingungen zum Beispiel  $y(x_0) = y(x_1) = 0$ , dann können wir etwa

$$W_i = (x - x_0)(x - x_1)\varphi_i(x) \quad \text{mit beliebigen stetigen Funktionen } \varphi_i(x)$$

oder auch

$$W_i = \sin \frac{i\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad i = 1, 2, \dots$$

wählen. Sind die Randbedingungen nicht homogen

$$y(x_0) = y_0 \quad y(x_1) = y_1 \quad \text{mit } y_0 \neq 0 \text{ oder } y_1 \neq 0$$

kann man folgenden Ansatz wählen:

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i W_i(x) + W_0(x),$$

wobei  $W_0(x_0) = y_0$  und  $W_0(x_1) = y_1$  gilt und die übrigen  $W_i$  die homogenen Randbedingungen erfüllen. Für  $W_0$  wählen wir zum Beispiel

$$W_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0.$$

Da der Erfolg des Verfahrens von Ritz sehr stark von den Funktionen  $W_i$  abhängt, ist es wichtig diese günstig zu wählen.

### 6.1.1 Ein Beispiel

Gesucht sei das Minimum des Funktionals

$$I(y) = \int_{-1}^1 \frac{1}{2} y'(x)^2 + 3y(x) \sin \pi x dx \quad (26)$$

unter den Randbedingungen  $y(-1) = 0$  und  $y(1) = 2$ . Wir wenden zunächst das Verfahren von Ritz an. Wir wählen

$$W_1 = 1 + x \quad W_2 = 1 - x^2 \quad W_3 = x(1 - x^2). \quad (27)$$

Somit erhalten wir unsere Näherungsfunktion

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2) := (1 + x) + \alpha_1(1 - x^2) + \alpha_2 x(1 - x^2).$$

Setzen wir nun in das gegebene Funktional ein, erhalten wir

$$I(\varphi) = 1 + \frac{6}{\pi} + \frac{4}{3}\alpha_1^2 + \frac{4}{5}\alpha_2^2 + \frac{36}{\pi^3}\alpha_2.$$

Die Bedingungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} = 0, \quad i = 1, 2$$

liefern die Werte

$$\alpha_1 = 0 \quad \alpha_2 = -\frac{45}{2\pi^3}.$$

Wir erhalten also folgende Näherungslösung

$$\varphi_1 = 1 + x - \frac{45}{2\pi^3}x(1 - x^2).$$

Zum Vergleich wollen wir das Verfahren ein zweites Mal anwenden und wählen

$$W_1 = 1 + \sin \frac{\pi}{2} \quad W_2 = \sin \pi x \quad W_3 = \sin 2\pi x \quad (28)$$

Nach analoger Rechnung erhalten wir

$$\varphi_2 = 1 + \sin \frac{\pi}{2}x - \frac{9 + 2\pi}{3\pi^2} \sin \pi x + \frac{1}{15\pi} \sin 2\pi x.$$

Wenden wir auf unsere Näherungslösungen das Funktional (26) an erhalten wir:

$$I(\varphi_1) = 2,48859\dots \quad I(\varphi_2) = 2,45650\dots$$

Dieses Beispiel lässt sich auch mit Hilfe der Euler-Gleichung lösen, wodurch wir eine einfache Möglichkeit haben die Genauigkeit der Näherungen zu bestimmen. Mit  $F(x, y, y') = \frac{1}{2}y'(x)^2 + 3y(x) \sin \pi x$  erhalten wir aus (8)

$$3 \sin \pi x - y'' = 0$$

und durch zweimaliges Integrieren

$$y = \frac{3}{\pi^2} \sin \pi x + c_1 x + c_2$$

mit den Integrationskonstanten  $c_1$  und  $c_2$ . Diese bestimmen wir mit Hilfe der Nebenbedingungen  $y(-1) = 0$  und  $y(1) = 2$ . Man erhält folgendes Gleichungssystem

$$-c_1 + c_2 = 0 \quad c_1 + c_2 = 2$$

und schließlich die exakte Lösung des Variationsproblems:

$$y(x) = 1 + x - \frac{3}{\pi^2} \sin \pi x \quad \text{und}$$

$$I(y) = 2,45391 \dots,$$

woraus man auch sieht, dass der Ansatz (28) in diesem Fall das bessere Ergebnis liefert.

## Literatur

- [1] P. Breitfeld. *Sammelsurium zur Mathematik*. 2004. <http://www.sfbw.de/phag/skripte/tensoren.pdf>.
- [2] L.E. Elsgolc. *Variationsrechnung*. B.I.-Wissenschaftsverlag, 1970.
- [3] P. Vachenauer K. Meyberg. *Höhere Mathematik 2*. Springer, 2001.
- [4] E. Maor. *Die Zahl e - Geschichte und Geschichten*. Birkhäuser, 1996.
- [5] H. von der Mosel. *Variationsrechnung I*. 2003. Skriptum zu einer Vorlesung an der Universität Bonn im Wintersemester 2002/2003.
- [6] P. Lesky W. Gröbner. *Mathematische Methoden der Physik*. Hochschul-taschenbücher-Verlag, 1964.
- [7] A. Wagner. *Die Variationsrechnung und ihre Basler Ursprünge*. Uni Nova 87 (Juni 2000).
- [8] E. W. Weisstein. *Brachistochrone Problem*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/BrachistochroneProblem.html>.
- [9] E. W. Weisstein. *Cycloid*. From MathWorld—A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Cycloid.html>.